2026 学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测
数学试题卷

考生须知:

1. 本试卷分试题卷和答题卷两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域（黑色边框）内作答，超出答题区域的作答无效!

3. 考试结束，只需上交答题卡。

一、选择题

本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.（5 分） 已知 i 为虚数单位，若 $z\mathrm{i}+2=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$(　　)

A. 8　　B. 4　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

2.（5 分） 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P(X\leqslant -1)=P(X\geqslant 4a-3)$，则 $a=$(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3.（5 分）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $0<x\leqslant 1$ 时, $f(x)=5-\tan x$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$(　　)

A. -4　　B. 4　　C. 6　　D. -6

4.（5 分） 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_n=$(　　)

A. $2n-1$　　B. 2^n　　C. 2^n+1　　D. 2^n-1

5.（5 分） 已知曲线 $y=ax-\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$，则 $a=$(　　)

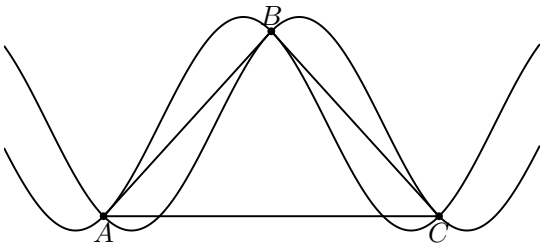
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

6.（5 分）中国数学家菲尔兹奖获得者邓邓曾对玻尔兹曼熵进行深入研究, 在一定条件下, 系统的熵 $S(t)$ 随时间 t 的变化规律为 $S(t)=S_{\mathrm{e}}+(S_0-S_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{-\lambda t}$, 其中 S_{e} 为平衡态熵, S_0 为初始熵, $\lambda\,(\lambda>0)$ 为分子碰撞频率，e 为自然对数的底数．设 $S_0<S_{\mathrm{e}}$，当 t 增大时，系统的熵 (　　)

A. 减小，且减速越来越慢　　B. 减小，且减速越来越快

C. 增大，且增速越来越快　　D. 增大，且增速越来越慢

7.（5 分）如图，A,B,C 是曲线 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的三个相邻的交点．若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，则 $|\varphi|$ 的最小值为 (　　)



A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

8.（5 分）已知圆 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$，$C_2:(x-2)^2+y^2=1$，$C_3:(x-3)^2+y^2=1$，直线 $l:y=kx$ 被 C_1，C_2，C_3 截得的弦长分别为 L_1，L_2，L_3．若 $L_1=L_2+L_3$，则 $k=$(　　)

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{5}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、选择题

本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.（6 分）为研究光照时间 x（单位：h）与某植物产量 y（单位：$\mathrm{t/hm^2}$）之间的关系，现收集一组数据并计算得：平均光照时间为 10h，植物平均产量为 $5.2\mathrm{t/hm^2}$，经验回归方程为 $\hat{y}=0.5x+\hat{a}$，则 (　　)

A. $\hat{a}=0.2$

B. 变量 x 和 y 正相关

C. 光照时间每增加 1h，植物产量约增加 $0.5\mathrm{t/hm^2}$

D. 当 $x=11$ 时，y 的预测值为 7

10.（6 分）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 P 在 C 的准线上，则 (　　)

A. $|AB|$ 的最小值为 4

B. 存在点 P，使得 $\angle APB=\frac{2\pi}{3}$

C. 若 $PA\perp PB$，则直线 PA 与 C 有两个交点

D. 若点 P 在 x 轴上，则 $\angle APF=\angle BPF$

11.（6 分）若存在实数 φ 和 $\theta(\theta>0)$，使得对 $\forall n\in\mathbf{Z}$，$\sin(n\theta+\varphi)\leqslant a$，则 (　　)

A. $a\geqslant -1$

B. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\theta=\frac{\pi}{3}$

C. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，a 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}-0.001$ 时，θ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$

三、填空题

本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12.（5 分）已知单位向量 a,b,c 满足 $a+b-c=0$，则 $a\cdot b=$ _____.

13.（5 分）已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$，$|PF_1| = 3|PF_2|$，则 C 的离心率为 _____.

14.（5 分）已知 e 是自然对数的底数，若集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid x\mathrm{e}^x - ax - 2 < 0\}$ 恰有 4 个子集，则满足条件的整数 a 的个数为 _____.

四、解答题

本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3a^2}{10\sin A}$.

（1） 求 $\sin B \sin C$；

（2） 若 $\cos(B - C) = \frac{2}{5}$，$a = 1$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16.（15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1 = 1$，$\frac{S_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{2}$.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2） 记 $P_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}$，$Q_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-1}}}$，证明：当 $n \geqslant 2$ 时，$P_n < Q_n$.

17.（15 分）已知 $0 < a < 1$，设集合 $E_a = \{(x, y) \mid y = a^x\} \cap \{(x, y) \mid y = \log_a x\}$.

（1） 若 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \in E_a$，求 a；

（2） 若 $(b, c) \in E_a$，且 $b \neq c$．证明：

（i） $b\ln b = c\ln c$；

（ii） $b + c > \frac{2}{\mathrm{e}}$（e 为自然对数的底数）.

18.（17 分）已知椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，过坐标原点的直线交 Γ 于 M，N 两点，且 $|MN|$ 的最大值为 4.

（1） 求 Γ 的方程；

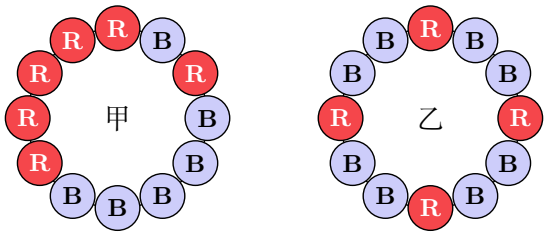
（2） 设点 M 在第一象限，作 $ME \perp x$ 轴，垂足为 E，连结 NE 并延长交 Γ 于点 G.

（i） 证明：$MN \perp MG$；

（ii） 记 $\triangle MNE$ 外接圆面积为 S_1，$\triangle MEG$ 外接圆面积为 S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值.

19.（17 分）一个圆形项链有 $m \times n\,(m, n \in \mathbf{N}^*)$ 颗珠子，每颗为红色或蓝色．若任意将这串项链分割成 m 段，每段连续 n 颗珠子，各段中红色珠子的个数互不相同，那么称这串项链为 (m, n)—好分链，正整数对 (m, n) 为分链数对．

（1） 现有甲乙两串项链，如图所示，R 表示红色，B 表示蓝色．请判断它们是否为 $(4, 3)$—好分链（给出判断即可，不必说明理由）；



（2） 证明：对任意给定的 $n \in \mathbf{N}^*$，$(n+1, n)$ 是分链数对；

（3） 对给定的 $n \in \mathbf{N}^*$，求所有的正整数 m，使得 (m, n) 是分链数对．